Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2016
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 1

Les parties en italique sont des compléments qui n'étaient pas attendus des candidats.

Première partie (13 points)

A : Volume de la piscine

1. Étude graphique

   a. Si la largeur mesure 3m, le volume est d'environ 19 m^3

   b. Un volume de 27 m^3 correspond à une largeur d'environ 3,6 m.

   c. Si la largeur de la piscine est comprise entre 4 et 5 m son volume est compris entre environ 33 m^3 et environ 52 m^3.

2. Étude algébrique

   a. La hauteur du trapèze EFGH est la longueur EH de la piscine soit, 1,6 x.

L'aire de ce trapèze, en m^2 est donc donnée par la formule $\dfrac{(1{,}10+1{,}50)\times 1{,}6x}{2}$ soit $\dfrac{2{,}6\times 1{,}6x}{2}$ ou $1{,}3\times 1{,}6x$ ou encore $2{,}08x$.

La hauteur du prisme est la largeur AE de la piscine? Le volume du prisme en m^3 , obtenu en multipliant l'aire de base par la hauteur est donc égal à $2{,}08x^2$

   b. Si le volume est de 52 m^3, on a $2{,}08x^2 = 52$; $x^2 = \dfrac{52}{2{,}08} = \dfrac{52}{4\times 0{,}52} = \dfrac{100}{4}$

On en déduit que $x = \dfrac{10}{2} = 5$. Pour un volume de 52 m^3, la largeur est de 5 m.

B : Mise en eau

1.

   a. Le volume d'eau est égal au volume de la piscine moins celui du pavé droit dont les dimensions sont 8m, 5m et 0,1m. Le volume de ce pavé est $8\times 5\times 0{,}1\, m^3$ soit $4\, m^3$.

   Le volume d'eau est donc égal à $52\, m^3 - 4\, m^3$ soit $48\, m^3$.

   b. Si le tuyau débite 18 litres par minute, il débite 6 litres en 20 secondes et 48 litres en 8 fois plus de temps soit 160 secondes ou 2 minutes 40 secondes

Pour débiter 480 litres il faut 20 minutes et 400 secondes, soit 26 minutes et 40 secondes.

Pour débiter 4800 litres il faut 260 minutes et 400 secondes soit 4 heures 26 minutes et 40 secondes

Pour débiter 48000 litres (c'est à dire $48\ m^3$) il faut 40 heures 260 minutes et 400 secondes soit 44 heures 26 minutes et 40 secondes ou encore 1 jour 20 heures et 27 minutes si on arrondit à la minute.

Nous avons choisi une méthode permettant de faire toutes les étapes en calcul mental mais toutes les méthodes correctes sont évidemment acceptées.

2.

a. L'eau perdue formait un pavé égal à une moitié du pavé dont nous avons calculé le volume à la question 1.a. Il a donc été perdu $2\ m^3$ d'eau.

b. $\dfrac{2}{48} \approx 0{,}0416666$ le pourcentage d'eau perdu est donc d'environ 4,2%.

3. Augmenter un nombre de 3%, c'est le multiplier par 1,03. $207 \times 1{,}03^5 \approx 239{,}97$.

Monsieur Durand peut estimer ce budget à environ 240 € en 2020.

C : Dallage du sol autour de la piscine

1. Pour qu'aucune dalle ne soit coupée, la longueur du côté d'une dalle, en cm, doit être un diviseur commun à 120, 500 et 800.

En décomposant ces nombres en facteurs premiers, on obtient :

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

Le plus grand diviseur commun à ces trois nombres est donc $2 \times 2 \times 5$ ou 20, et la longueur du côté d'une dalle doit avoir pour mesure un diviseur de 20.

Le côté des dalles peut donc mesurer 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm ou 20 cm. *(On ne discutera ni le fait d'appeler « dalle » un carré d'1 cm de côté ni le fait de négliger l'épaisseur des joints pour un tel carré).*

2.

a. On peut décomposer la surface à recouvrir de la façon suivante :

- 4 carrés de 120 cm de côté contenant chacun 6×6 soit 36 dalles.
- 2 rectangles de 500 cm sur 120 cm contenant chacun 25×6 soit 150 dalles.
- 2 rectangles de 800 cm sur 120 cm contenant chacun 40×6 soit 240 dalles.

Le nombre total de dalles utilisées est donc $4 \times 36 + 2 \times 150 + 2 \times 240 \quad = \quad 924$.

b. Pour recouvrir un carré de 20 cm de côté avec des carrés de 5 cm de côté, il faut 4 rangées de 4 petits carrés, soit 16 carrés. S'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, Monsieur Durand aurait eu besoin de 924×16 dalles soit 14784 dalles.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1.

a. En utilisant le programme 1, le calcul dont le résultat s'affiche dans la cellule B1 est $(2\times3+3)\times(2\times3+3)-9$ soit $9\times9-9$. Le résultat obtenu est bien 72

Avec le programme B, la case de gauche contient 12, celle de droite contient 6 et le résultat final, produit de ces deux nombres, est 72.

b. En utilisant le $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ, le programme 1 calcule

$$\left(2\times\frac{-5}{4}+3\right)\times\left(2\times\frac{-5}{4}+3\right)-9 \text{ soit } \left(\frac{-5}{2}+3\right)\times\left(\frac{-5}{2}+3\right)-9 \quad = \quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-9 \quad = \quad -\frac{35}{4}.$$

Avec le programme B, la case de gauche contient -5, celle de droite contient $\frac{7}{4}$ et le résultat final, produit de ces deux nombres, est $-\frac{35}{4}$.

2. Si on note x le nombre choisi au départ, le programme 1 calcule

$$(2x+3)\times(2x+3)-9 \quad = \quad 4x^2+12x+9-9 \quad = \quad 4x^2+12x$$

Le programmes 2 calcule $4x\times(3+x) \quad = \quad 4x^2+12x$

On obtient donc le même résultat par les deux programmes quel que soit le nombre choisi.

3. Le programme 2 montre que le nombre obtenu est $4x\times(3+x)$ or un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul. Il y a donc deux façons d'obtenir 0 avec le programme 2 : choisir 0 ou choisir -3 (dans ce cas $(3+x)=0$).

Comme les deux programmes fournissent toujours le même résultat, pour obtenir 0 avec le programme 1 il faut également choisir un des deux nombres suivants : 0 ou -3.

Exercice 2

L'affirmation 1 est fausse. Si on choisit $a = b = 0{,}5$ le produit ab est égal à 0,25 ce qui est plus petit que a et que b.

L'affirmation 2 est vraie.

En effet $(n+1)^2-(n-1)^2=\left(n^2+2n+1\right)-\left(n^2-2n+1\right)=n^2+2n+1-n^2+2n-1=4n$ ce qui est bien multiple de 4 si n est un entier.

L'affirmation 3 est fausse.

En effet $(n-1)(n+1)-1=n^2-1-1=n^2-2$ ce qui n'est généralement pas le carré d'un entier. Par exemple si n = 3, l'expression vaut 7, ce qui n'est pas le carré d'un entier.

On n'obtient en réalité jamais le carré d'un entier, mais il n'était pas demandé de le prouver.

Exercice 3

1. La probabilité de tirer une boule bleue est égale au quotient du nombre de boules bleues par le nombre total de boules, elle est de 7/25 soit 0,28.
2. Nommons n le nombre de boules bleues qu'on ajoute. La probabilité de tirer une boule bleue après cet ajout est de $\dfrac{7+n}{25+n}$. Cette probabilité est supérieure ou égale à 0,4 quand $\dfrac{7+n}{25+n}\geq 0{,}4$

Cette inégalité est équivalente aux inégalités suivantes :

$7+n\geq 10+0{,}4n$; $0{,}6n\geq 3$; $0{,}2n\geq 1$; $n\geq 5$

Il faut rajouter au moins 5 boules bleues pour obtenir une probabilité supérieure ou égale à 0,4.

Remarque : l'emploi d'une inéquation n'est pas indispensable, on pouvait aussi calculer successivement les probabilités obtenues en rajoutant 1 boule bleue à chaque fois : 8/26 puis 9/27…

3. Nommons r le nombre de boules rouges qu'on ajoute. La probabilité de tirer une boule bleue après cet ajout est de $\dfrac{7}{25+r}$. Cette probabilité est inférieure ou égale à 0,2 quand $\dfrac{7}{25+r}\leq 0{,}2$

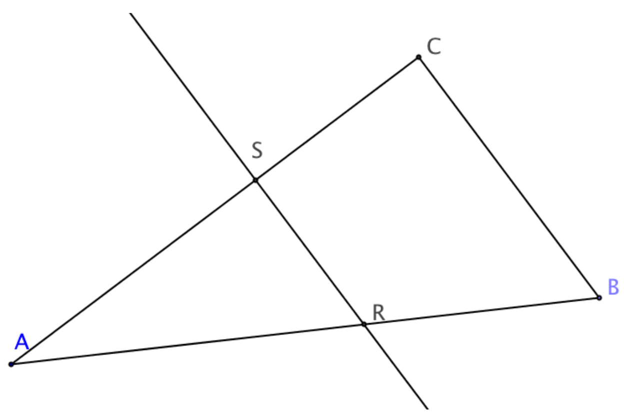
Cette inégalité est équivalente aux inégalités suivantes :

$7\leq 5+0{,}2r$; $2\leq 0{,}2r$; $10\leq r$

Il faut rajouter au moins 10 boules rouges pour obtenir une probabilité inférieure ou égale à 0,2.

Exercice 4

1.



Attention : la figure n'est pas aux dimensions demandées

2. Dans le triangle ABC :

$AB^2 = 65^2 = 4225$

$AC^2 + BC^2 = 56^2 + 33^2 = 3136 + 1089 = 4225$

On constate que $AB^2 = AC^2 + BC^2$, il en résulte que le triangle ABC est rectangle en C.

Les droites (BC) et (RS) sont alors toutes deux perpendiculaires à (AC), on en déduit qu'elles sont parallèles.

3. A, S et C sont alignés. A, R et B sont alignés. Par ailleurs (RS) et (BC) sont parallèles. Les triangles ABC et ARS sont donc en situation de Thales et on a :

$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC}$; $\frac{39}{65} = \frac{AS}{56}$; $\frac{3}{5} = \frac{AS}{56}$; $AS = \frac{168}{5} = 33{,}6$ AS mesure 33,6 cm.

4. Dans le triangle rectangle ARS, $\sin \widehat{ARS} = \frac{AS}{AR} = \frac{33{,}6}{39}$.

La calculatrice permet alors de déterminer que $\widehat{ARS} \approx 59{,}4898°$.

La mesure de $\widehat{ARS}$ arrondie à l'unité est de 59°

Troisième partie (14 points)

Situation 1

Quelques remarques préalables.

Les photos de certaines cartes comportent des lignes de séparation entre les collections mal placées qui passent sur certains dessins d'animaux. Cependant, comme ces lignes débordent de la carte, nous pensons qu'elles ont été rajoutées par les auteurs du sujet pour compenser le fait que les lignes vraiment présentes sur les cartes sont peu visibles sur les photos. Notre analyse ne prendra donc pas en compte ces lignes mal placées.

Il est dit que « l'objectif du maître est de faire réaliser par l'élève des collections de jetons de cardinaux identiques à ceux de la carte ». Malheureusement, rien n'est dit sur la consigne telle qu'elle est donnée aux élèves. C'est très gênant car la formulation de cette consigne pose des problèmes difficiles. Si on dit par exemple « il faut un jeton pour chaque dessin », on induit une procédure mais si on dit « il faut mettre autant de jetons qu'il y a de dessins » la principale difficulté pour l'élève est de comprendre la consigne. L'expression « autant que » est en effet loin d'être évidente.

La situation « boite à compter » décrite est très classique mais très discutable. Pour une situation permettant de travailler l'idée de « autant que » voir par exemple sur le site primaths.fr à la rubrique MS-GS la situation « juste assez ».

1.

a. Analyse a priori

Remarque : on demande des méthodes pour dénombrer, mais rien ne dit qu'il faille dénombrer. Il est probable par exemple que Kévin ne dénombre pas (question b).

Configuration 1

Procédures de dénombrement :

Les collections peuvent être dénombrées en comptant d'un en un : l'élève désigne les éléments un par un en récitant la comptine, le nombre qu'il dit en désignant le dernier élément est le cardinal de la collection.

Pour les collections les moins nombreuses (1 et 2) elles peuvent être reconnues de manière immédiate (subitizing)

La disposition des autres collections permet éventuellement d'avoir recours à une décomposition. Par exemple, la collection de 4 éléments est constituée de 3 éléments placés comme sur le dé 3 et un quatrième légèrement à l'écart. L'élève peut donc reconnaître « trois et encore un » et éventuellement savoir que « trois et encore un » c'est quatre.

On remarquera que « trois et encore un » suffit à construire une collection de même cardinal, même si on ne sait pas que « trois et encore un » s'appelle quatre. Doit-on dire dans ce cas qu'on a dénombré ? Selon nous oui, mais il n'est pas certain que le jury soit de cet avis.

Erreurs possibles :

Vu qu'il n'est pas demander d'analyser les erreurs mais seulement d'en citer deux, on pourrait se contenter de répondre « mettre trop d'objets » et « ne pas en mettre assez ». Nous osons espérer que ce ne sont pas les réponses attendues.

Un élève peut se tromper en réalisant la collection s'il récite mal la comptine numérique (par exemple « un, deux, trois, cinq ».

Il peut également se tromper s'il ne synchronise pas bien la prise d'objets avec l'énoncé des mots nombres.

Configuration 2

Procédures de dénombrement :

Le comptage peut être utilisé comme dans la configuration 1

Les configuration du dé peuvent avoir été mémorisées et être reconnues.

Erreurs possibles :

Les mêmes que dans la configuration 1 plus des erreurs liées au matériel (mélange des différentes collections).

b. Les deux élèves ont compris qu'il fallait réaliser des collections en rapport avec celles dessinées sur la carte. Ils ont constitué des collections de même cardinal que les premières collections de la carte.

Louise a probablement dénombré les collections puis réalisé des collections de même cardinal .

Ce n'est cependant pas certain, il est par exemple possible de montrer successivement chaque point de la collection et en prenant un jeton pour ce point. On réussit ainsi à avoir autant de jetons que de points sans dénombrer.

Kévin semble avoir voulu placer un jeton sur chaque point, ou reproduire avec ses jetons les dessins de la carte. Cette procédure permet de répondre aux attentes du maître sans dénombrer.

2. La configuration incluant une boite facilite le travail des élèves puisqu'elle évite le mélange éventuel des collections réalisées par les élèves. En revanche la petite taille des compartiments ne permet pas d'avoir une vue d'ensemble des collections de plus de deux éléments puisque les objets se superposent.

Cette limite privilégie la procédure de dénombrement par comptage, ce qui a de nombreux inconvénients (voir Rémi Brissiaud : « Premiers pas vers les maths » aux éditions Retz).

Situation 2

1.

a. Quentin utilise le fait que s'il y a 12 têtes il y a 12 animaux puis fait un essai en partageant le groupe en deux groupes égaux (6 chameaux et 6 dromadaires). Il calcule alors le nombre de bosses, trouve qu'il y en a 18 et ajuste son essai en remplaçant un dromadaire par un chameau et en recalculant le nombre de bosses (19). Il remplace à nouveau un dromadaire par un chameau, constate qu'il y a bien alors 20 bosses et compte ne nombre de dromadaires restant sur son schéma.

b. S'il y avait autant de dromadaires que de chameaux (76) le nombre de bosses serait de 152 + 76 soit 228. En réalité il y a 12 bosses de moins. Il faut donc remplacer 12 chameaux par des dromadaires puisque chaque remplacement diminue de un le nombre de bosses. Il y a donc 64 chameaux et 88 dromadaires.

2.

a. Ramia commence par dessiner douze têtes puis une bosse pour chaque animal puisqu'ils en ont tout au moins une. Ensuite elle rajoute une deuxième bosse à certains animaux jusqu'à obtenir le nombre total de bosses indiqué (elle peut avoir compté au fur et à mesure qu'elle dessinait ou calculé qu'ayant déjà dessiné 12 bosses elle devait en dessiner encore 8).

b. Il y a 546 animaux. Si chacun avait une bosse il y aurait 546 bosses. 700 - 546 = 154, il faut donc rajouter 154 bosses, ce qui signifie qu'il y a 154 chameaux et par conséquent 392 dromadaires.

Situation 3

Procédure 1

Quand on rajoute 4 litres, l'eau monte de 2 cm alors quand on rajoute 2 litres (la moitié de 4 litres) elle monte de 1 cm. Quand on rajoute 6 litres (3 fois 2litres) l'eau monte de 3 fois 1 cm soit 3 cm.

Cette procédure s'appuie sur une caractéristique essentielle de la proportionnalité : la propriété de linéarité sous son aspect multiplicatif (s'il y a n fois plus d'une grandeur, il y a n fois plus de l'autre).

Procédure 2

Quand on rajoute 4 litres, l'eau monte de 2 cm alors quand on rajoute 2 litres (la moitié de 4 litres) elle monte de 1 cm. Quand on rajoute 6 litres (4 litres plus 2 litres) l'eau monte de 2cm plus 1 cm soit 3 cm.

Cette procédure utilise également à la première étape l'aspect multiplicatif de la linéarité. La deuxième étape utilise l'aspect additif de la linéarité (si on ajoute deux quantités d'une grandeur, on ajoute les quantités correspondantes de l'autre grandeur).

Procédure 3

Quand on rajoute 4 litres, l'eau monte de 2 cm alors quand on rajoute 1 litre (quatre fois moins) elle monte de 0,5 cm (obtenu en divisant 2 par 4). Quand on rajoute 6 litres (6 fois 1 litre) l'eau monte de 6 fois 0,5 cm soit 3 cm.

Cette procédure dite « règle de trois » s'appuie également sur l'aspect multiplicatif de la linéarité mais sous une forme ritualisée, l'étape intermédiaire consistant toujours à revenir à l'unité.